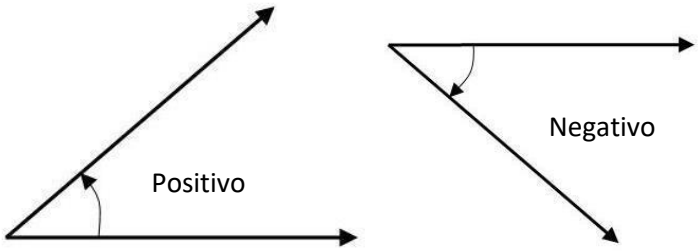
Ángulos – Introducción a la trogonometría

Sistema de medición de ángulos

Analizaremos dos sistemas diferentes que se usan para expresar la medida de un ángulo.

Signos de los ángulos:

Tomaremos como ángulo positivo aquel que se obtiene de hacer rotar una semirrecta en sentido antihorario y como ángulo negativo aquel que se obtiene de hacer girar una semirrecta en sentido horario.

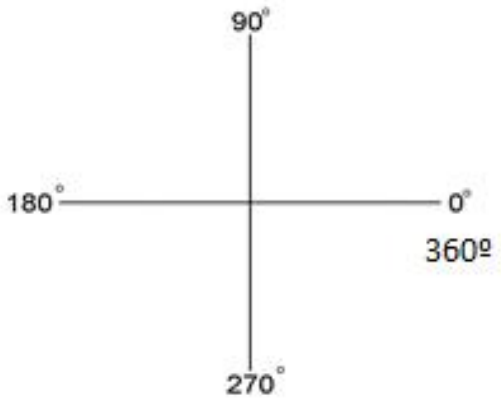


1) Sistema sexagesimal

Si dividimos una circunferencia en 360 arcos iguales y unimos los puntos de división con el centro, obtendremos 360 ángulos iguales a cada uno de los cuales se asigna el valor de un grado sexagesimal (1°).

A su vez, cada ángulo de un grado se subdivide en 60 partes iguales llamadas minutos y por último cada ángulo de un minuto vuelve a subdividirse en 60 partes, obteniéndose un ángulo de un segundo.

Entonces: el ángulo de un giro tiene 360°. El ángulo de medio giro, llamado ángulo llano mide 180°. El ángulo de un cuarto de giro, se denomina ángulo recto y mide 90°; la mitad de un ángulo recto mide 45°. Un ángulo de 33 grados sexagesimales, 45 minutos y 30 segundos, se escribe: $33°45'30"33°45'30"$.



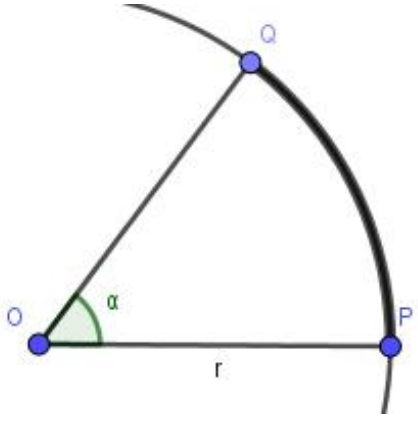
2) Sistema circular.

Este sistema utiliza como unidad de medida el "radián" (1 rad). Un radián corresponde al ángulo central de una circunferencia, cuya longitud de arco es equivalente al radio.

Para saber cuántos radianes mide un ángulo determinado, debemos saber cuántas veces cabe el radio de la circunferencia en el arco de la misma recorrido por dicho ángulo.

La medida de un ángulo queda definida en este sistema, como el cociente entre la longitud del arco ^{PQPQ} y la longitud del radio (r).

Si designamos con α al ángulo de vértice coincidente con el centro de la circunferencia:



$$\alpha = \frac{longitud\ de\ arco\ PQ}{r}$$

El ángulo de un giro mide $2\pi 2\pi$ radianes. El ángulo de medio giro mide $\pi\pi$ radianes. El ángulo recto mide $\frac{\pi\pi}{22}$ radianes. La mitad de un ángulo recto mide $\frac{\pi\pi}{44}$ radianes.

Teniendo en cuenta la medida del ángulo llano en los sistemas, puede establecerse la siguiente proporción:

$$\frac{\alpha^r}{\pi} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \quad \Rightarrow \quad \alpha^r = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^\circ$$

En el sistema de medida en radianes, el ángulo de un radián (longitud del arco igual a la medida del radio) equivale a un ángulo del sistema sexagesimal de 57° 17'44",80; en efecto:

$$\begin{array}{l} \pi\ rad\pi\ rad \\ 1\ rad1\ rad \end{array} \overline{\qquad\qquad} \begin{array}{l} 180^0180^0 \\ \end{array}$$

$$\frac{180^0}{\pi} = 57° 17'44",8$$

$$\frac{180^0}{\pi} = 57° 17'44",8$$

Por ejemplo:

- Si $\alpha^\circ = 30^\circ$, lo expresamos en radianes

$$\alpha^r = \frac{\pi}{180^\circ} \bullet 30^\circ = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236$$

- Si $\alpha^r = 0{,}7854$, al expresarlo en el sistema sexagesimal se obtiene

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \bullet 0{,}7854 = 45^\circ$$

Actividades

1. Transformar a radianes los siguientes ángulos expresados en el sistema sexagesimal:

1.1. $240°240°$

1.2. $300°300°$

1.3. $53° 18'18"53° 18'18"$

1.4 $146° 30'30"146° 30'30"$

1.5 $267° 38'73"267° 38'73"$

2. Transformar al sistema sexagesimal, los siguientes ángulos expresados en radianes:

2.1. $\frac{\pi}{6}\frac{\pi}{6}$

2.2. 3,273,27

2.4. 5,195,19

2.3. $\frac{3\pi 3\pi}{2\ 2}$

3. Realizar las siguientes operaciones con los ángulos del punto 1:

1.1+1.2 =

1.3 + 1.4=

1.5 - 1.4 =

2 . (1.4) -1.1=

Objeto de la trigonometría

Para estudiar las relaciones que pueden establecerse entre los lados de un rectángulo, resulta suficiente medir sus lados, lo que equivale a medir segmentos y deducir consecuencias de esas mediciones.

Si el polígono de menor número de lados en que pudiera descomponerse un polígono cualquiera fuese un rectángulo, las herramientas que nos provee la Geometría serían suficientes para estudiar las relaciones entre sus elementos. Pero es sabido que cualquier polígono puede descomponerse por complicado que sea, en un número finito de triángulos y si han de establecerse relaciones entre los lados de un triángulo es necesario hacer intervenir en los cálculos las medidas de sus lados y de sus ángulos.

La rama de la Matemática que se ocupa de este problema se denomina Trigonometría (del griego: trigonos: triángulo; metría: medida); utilizando esta disciplina estaremos en condiciones de abordar la resolución numérica de triángulos.

La trigonometría resulta de fundamental importancia en el estudio de algunos problemas del Análisis Matemático y en el de fenómenos vibratorios vinculados con la Física, para lo cual es imprescindible el conocimiento del concepto que desarrollaremos de las relaciones trigonométricas.

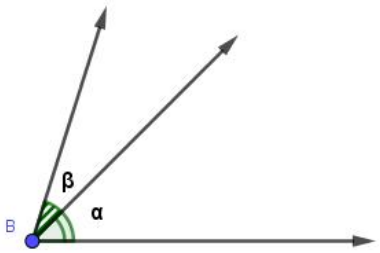
Conceptualmente, el estudio de cualquier construcción geométrica del plano puede ser transformado, usando la Trigonometría, en un problema aritmético; la ventaja de esta transformación se ha ido acentuando con el correr de los años debido al auxilio de nuevas tecnologías, que permite realizar cálculos con exactitud y rapidez.

Nuestro problema comienza al "medir" y como resulta en general sencilla y conocida la medición de segmentos, nos ocuparemos fundamentalmente de la medición de ángulos.

MEDIR un ángulo, es asignarle un número de manera tal que, ese número, permita reproducirlo en cualquier parte, sin necesidad de transportarlo materialmente de un lugar a otro.

Ángulos consecutivos

Son aquellos ángulos que tienen el vértice en común y, como lado común, el final de un ángulo y el comienzo del otro:



Aquellos ángulos consecutivos cuyos lados no comunes forman un ángulo recto, se denominan ángulos complementarios.

Si los lados no comunes de dos ángulos consecutivos forman un ángulo llano, dichos ángulos son suplementarios.

Los lados no comunes de dos ángulos consecutivos cualesquiera determinan un ángulo llamado ángulo suma.

Resolución de triángulos

El problema general de resolver un triángulo consiste en determinar sus elementos fundamentales (ángulos y lados) conociendo tres de ellos, de los

cuales uno al menos debe ser un lado. Un triángulo queda determinado si se conocen:

a) dos lados y el ángulo comprometido.

b) un lado y dos ángulos.

c) los tres lados.

d) dos lados y un ángulo opuesto.

Si, como caso particular el triángulo es rectángulo, basta con conocer dos elementos (además del ángulo recto).

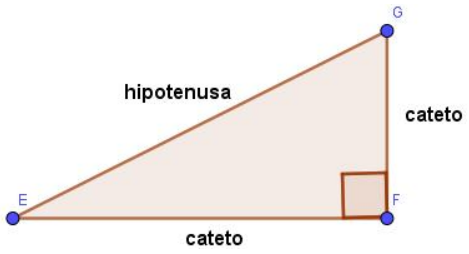
a) la hipotenusa y un ángulo agudo.

b) un cateto y un ángulo agudo.

c) la hipotenusa y un cateto.

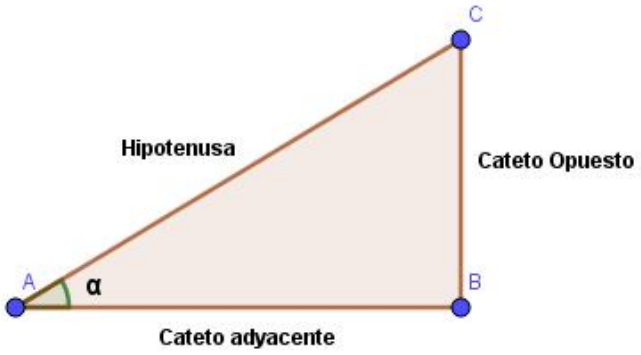
d) los dos catetos.

Dado, entonces, un triángulo rectángulo, para la resolución del mismo, utilizamos las relaciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras.



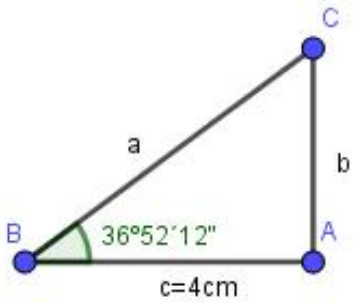
Relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Las razones trigonométricas de un ángulo α son las razones obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo.



Ejemplo 1:

Si del triángulo rectángulo de la figura se conocen un cateto y un ángulo agudo.



a) Cálculo de $\hat{C}\hat{C}$:

Los ángulos $\hat{B}\hat{B}$ y $\hat{C}\hat{C}$ son complementarios.

$$\hat{B} + \hat{C} = 90° \qquad \hat{C} = 90° - \hat{B}$$

$\hat{C} = 90° - 36°52´12"$

$\hat{C} = 53°7´48"$

b) Cálculo de la hipotenusa (aa):

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\cos \hat{B}}$$

$$a = \frac{4cm}{\cos 36°52´12"} \Rightarrow a = 5\ cm$$

b) Cálculo del cateto b:

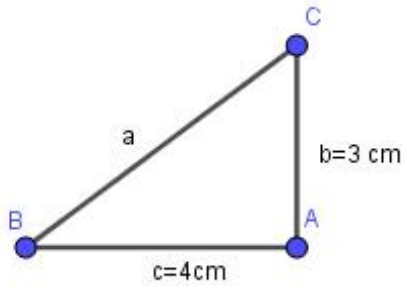
$$tg\,\hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot tg\,\hat{B}$$

$b = 4\ cm.0{,}75$

$b = 3\ cm$

Ejemplo 2:

Si del triángulo rectángulo de la figura, se conocen dos de sus catetos.



a) Cálculo de la hipotenusa (a):

Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (3\ cm)^2 + (4\ cm)^2$$

$$a^2 = 9\ cm^2 + 16 cm^2$$

$$a^2 = 25\ cm^2$$

$$a = 5\ cm$$

b) Cálculo de $\hat{B}$:

$$tg\ \hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow tg\ \hat{B} = \frac{3}{4}$$

$$\hat{B} = arctg\ \frac{3}{4}$$

$$\hat{B} = 36°52'12"$$

c) Cálculo de $\hat{C}$:

$$\hat{B} + \hat{C} = 90° \qquad \hat{C} = 90° - \hat{B}$$

$$\hat{C} = 90° - 36°52'12"$$

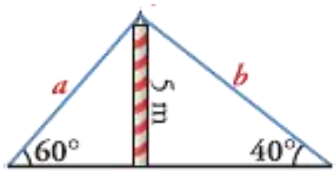
$$\hat{C} = 53°7'48"$$

Actividades

1. ¿Cuál es la altura de un edificio si cuando el sol está a 37º sobre el horizonte, arroja una sombra de 60 m?

1. Hallar el área de un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia de radio r= 1 m.
2. Durante un aterrizaje, el piloto de un avión debe pasar reglamentariamente 50 m. por encima de una pared de 30 metros de altura y tocar tierra como mínimo a 700 metros de la pared. Hallar el ángulo límite de descenso.

4. Un mástil de 5 metros se ha sujetado al suelo con dos cables: a y b, como muestra la figura:



4.1. Calcular la longitud de cada cable.

4.2 ¿Qué distancia separa a los extremos de los cables que tocan el suelo?

5. Hallar la altura de una antena sabiendo que a una distancia de 20 m desde el pie de la antena se observa su extremo superior elevando la visual un ángulo de 25°.

6. Calcular la longitud que debe tener una escalera para que, apoyada en la pared alcance una altura de 2,85 m al formar con el piso un ángulo de 58°

7. Se colocaron 4 alambres de suspensión para una antena de transmisión y cada uno fue sujetado formando un ángulo de 72° con el piso. Si se utilizaron en total 150 m de alambre, ¿cuál es la altura de la antena?

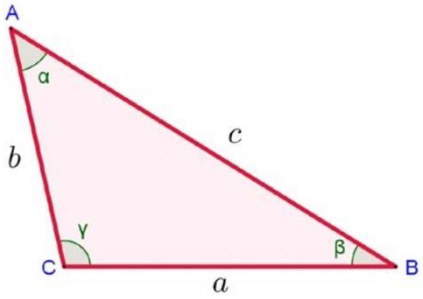
8. La altura desde un departamento hasta la planta baja es de 31,8 m y luego se camina en línea recta 300 m hasta un puesto de revistas. ¿Con qué ángulo de depresión se observa el puesto desde la ventana del departamento?

9. Una aerosilla de 756 m de largo sube esquiadores a una montaña hasta una altura de 238 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación de la aerosilla?

10. Desde la terraza de un edificio, se observa, con un ángulo de depresión de 15°, un automóvil que se encuentra a 200 m del pie del edifico. ¿A qué altura se encuentra la terraza?

11. A qué distancia deben ubicarse dos cuerpos de edificios de 30 metros de altura, para que la sombra que arroja uno de ellos llegue al pie del otro cuerpo cuando el sol está a 30º sobre el horizonte.

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS



- Suma ángulos interiores: 180°

TEOREMA DEL SENO

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

TEOREMA DEL COSENO

Datos { dos lados del triángulo; ángulo comprendido entre los lados dados }

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b.\,c.\,\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a.\,c.\,\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a.\,b.\,\cos\gamma$$

- Superficie del triángulo

Fórmula de Herón

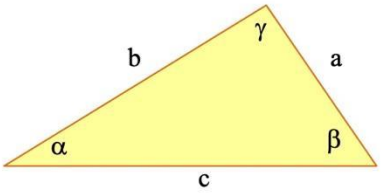
$$Sup = \sqrt{p.\,(p-a).(p-b).(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

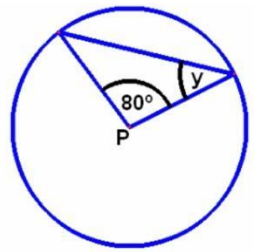
La fórmula de Herón, descubierta por Herón de Alejandría, relaciona el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados *a*, *b* y *c*.

Ejercitación

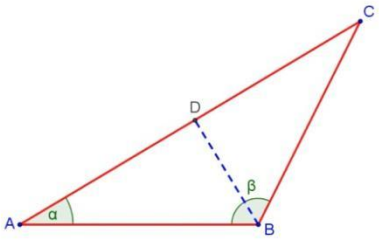
- Con los datos dados en cada caso, determine los otros elementos del triángulo oblicuángulo y complete la tabla. Si no se puede determinar explique por qué.



- La circunferencia de la figura tiene como centro el punto P; sobre ella se ha trazado un triángulo con un ángulo de 80°, ¿Cuál es el valor del ángulo y? ¿Cuánto vale el lado opuesto al ángulo de 80°?



- Calcule el lado $\overline{DB}$, sabiendo que este es perpendicular a $\overline{AC}$.



$\alpha = 15°20'$ $\beta = 105°10'$ $\overline{AC} = 80\ cm$